無限遠に2個の素点を持つ平面代数曲線について

杉江, 徹; 宮西, 正宜

代数幾何学シンポジウム記録
1977年度 pp.99-127

無限遠に 2個の素点を持つ，平面代数曲線について。

杉江 徹 （阪大理）
宮西 正宜 （阪大理）

以下，kは標数0の代数的閉体とする。fを，k係数の，二変数X, Yの多項式とすると Abhyankar-Moh [1] によって 次の定理が証明された。

定理 $f=0$によって定義される，$\mathbb{A}^2_k = \mathrm{Spec}\, k[X, Y]$上の curve が，$\mathbb{A}^1_k$に同型であれば，$\mathbb{A}^2_k$の座標を適当にとりかえて，$C=\{f=0\}$を，$x$軸に選ぶことができる。

さて，ここでは，$f=0$によって定義される$\mathbb{A}^2_k$上の curve が，$G_m = \mathrm{Spec}\, k[X, X^{-1}]$に同型になる場合を考える。すなわち 次の定理を証明するのが目標である。

定理 fを，X, Y二変数の，k係数の多項式とし，$\forall \alpha \in k$に対し，C_αを$f=\alpha$によって定義される，$\mathbb{A}^2_k$上の curve とする。

$\mathbb{A}^2_k$の座標を適当にとりかえて，fが，

$f = c(X^d Y^e - 1)$　　$(d, e) = 1$, $c \in k^*$
と表わせるためには　次の２条件が成り立つことが必要十分である。

1). $\mathbb{A}^2$ 上の *pencil* $\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ の *general member* は G_m に同型。特に curve $\{f=0\}$ は G_m に同型。

2) $\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ のすべての *member* は *connected*.

一般に　$f=0$ が G_m に同型でも　$\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ の *general member* は G_m に同型になるとは限らない。（例　$f = X^2Y^2 + 2XY^2 + Y^2 + 2XY + 1$）

また　$\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ の *general member* が　G_m に同型であっても　$\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ のすべての *member* が連結であるとは限らない。

（例　$f = Y(XY+1) + 1$　）

$\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ が連結でない *member* を含む場合，及び定理の解析的な証明について　H. Saitō [4] を参照。

§1. pencil についての補題.

この§で以下に必要な pencil についての補題をいくつか示しておく。

Vをk上定義されている non-singular な proj. surface, ΛをVの上の既約な linear pencil で general member は rational curve とし, BをΛの ordinary base pt. 全体とする。即ち infinitely near base pt. は含めない。またBの各点はΛの general member の one place pt. とする。

ΔをΛの red. member としΔが$\Delta=\sum_{i=0}^{r} n_i D_i$と表わされているとする。

"定義" 次の条件がみたされる時, Λの red. member Δを linear と定義する。

(i) $D_i \simeq \mathbb{P}^1_k$

(ii). 相異なるi, jに対し$(D_i \cdot D_j)$は0か1。

(iii) i, j, kが互いに相異なるとき, D_i, D_j, D_kは一点で交わらない。

(iv) Δの weighted graph は linear chain である。(cyclic chain を含まない。)

以上の仮定の下に、次の補題が成り立つ。

"Lemma 1"

Δ を Λ の red member とする。もし $D_i \cap B \neq \phi$ となる Δ の任意の component D_i に対し、$(D_i^2) \leq -1$ であれば、Δ は $D_j \cap B = \phi$ となる exceptional component（第一種例外曲線）を含む。

"Lemma 2"

$\cancel{D}_{\Delta}$ を Λ の linear red. member とし、Δ は $\Delta = \sum_{i=0}^{r} n_i D_i$ $(n_i > 0)$ と表わされているとする。ここで次の三つの条件を仮定する。

(i) $D_0 \cap B = \{P\}$, P は $D_i\ (i \neq 0)$ に含まれない。

(ii) $(D_0^2) = p > 0$.
D_0 は Δ の terminal component ではない。(i.e. Supp(Δ) の二本以上の component が D_0 と交わる。)

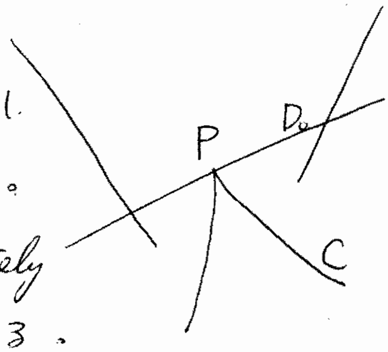
(iii) $(D_i^2) < 0$ $(1 \leq i \leq r)$

特に $D_i \cap B = \phi$ であれば $(D_i^2) < -1$。

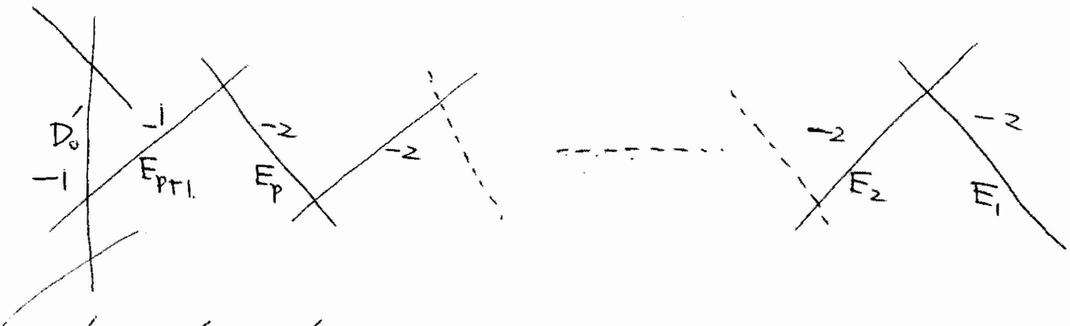
以上のことを仮定すると Δ における D_0 の

multiplicity $n_0 = 1$. $(C, D_0) = p+1$."

Proof)



C を Λ の general member とし
$e = (C \cdot D_0) = i(C \cdot D_0 ; P)$ とおく。
$P_0 = P,\ P_1, \cdots, P_p$ を P の infinitely near pt で D_0 の上の点とする。
但し P_i は P_{i-1} の infinitely near pt of order one である。 $\sigma : V' \to V$ を $P_0, P_1, \cdots P_p$ を center とする blowing up の composition とすると、 $\sigma^{-1}(\mathrm{Supp}\,\Delta)$ の configuration は次の図のようになる。



Λ', C', D_0' は Λ, C, D_0 の proper transform
Δ' は Δ に対応する Λ' の member とし、 $E_i\ (1 \leq i \leq p+1)$ は P_{i-1} を blowing up した時に出てくる excep. curve の proper transform とする。

もし、 C' が E_{p+1} と交わらなければ E_{p+1} は明ら

かに Δ′ の component になる。そこで D_0' を contract すれば Δ′ の三本の component が一点で交わることになって矛盾である。よって C' は E_{p+1} と交わる。同様に Lemma 1 を使って E_{p+1} は Δ′, C' いずれの component でもないことがわかり、E_{p+1} は Λ′ の quasi-section になる。Λ の base pt P は Λ の general member の one place pt であると仮定しているから $n_0 = (D_0', E_{p+1}) = 1$

Q.E.D.

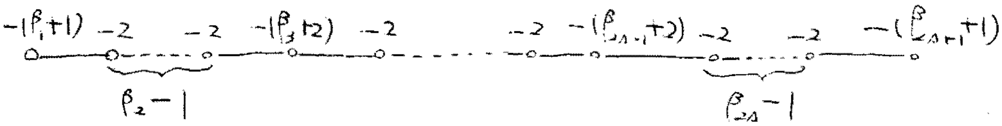
以下 Δ を Λ の linear reducible member で w.g が次のように与えられていると仮定する。

$$G \overset{p}{\underset{D_1}{\text{———}\circ\text{———}}} M \overset{q}{\underset{D_2}{\text{———}\circ\text{———}}} H$$

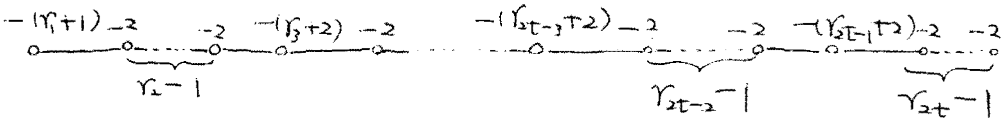
但し $p = (D_1^2)$, $q = (D_2^2)$, D_1, D_2 の Δ における multiplicity を n_1, n_2 とする。また G, M, H の w.g は次のようになるとする。

$$G:\ \underbrace{\overset{-2}{\circ}-\cdots-\overset{-2}{\circ}}_{\alpha_1-1}-\overset{-(\alpha_2+2)}{\circ}-\underbrace{\overset{-2}{\circ}-\cdots-\overset{-2}{\circ}}_{\alpha_3-1}-\cdots-\overset{-2}{\circ}-\overset{-(\alpha_{2r-2}+2)}{\circ}-\underbrace{\overset{-2}{\circ}-\cdots-\overset{-2}{\circ}}_{\alpha_{2r-1}-1}-\overset{-(\alpha_{2r}+1)}{\circ}$$

M ;



H ;



Lemma 2 を使って、次の二つの補題を証明できる。

"Lemma 3"

$B=\{P_1, P_2\}$　$P_i \in D_i$ $(i=1,2)$、かつ P_i は Δ の D_i 以外の component には含まれていないとする。また $n_1 \neq 1$, $n_2 \neq 1$, かつ $p \leq 0$ か $q \leq 0$ のいずれかが成り立つと仮定する。すると次の事が成り立つ。

(1) $p \geq 0$ かまたは $q \geq 0$

以下 $q \geq 0$, $p \leq 0$ と仮定する。

(2) $p < 0$ かつ $q \geq 0$ とすると $H = \phi$

(3) $p = 0$, $q \geq 0$ とすると、$G = \phi$ or $H = \phi$."

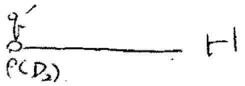
"Lemma 4"

$B=\{P_2\}$, $P_2 \in D_2$, P_2 は Δ の D_2 以外の component には含まれていないとし、$n_2 \neq 1$ と仮定する。すると次の事が成り立つ。

(1) $p < 0$

(2) $p \leq -2$ とすると $q \geqq 0$, $H=\phi$

(3) $p = -1$ とすると $H=\phi$ か、又は V から non-singular projective surface W への contraction $\rho : V \longrightarrow W$ が存在し、$\rho_*\Lambda$ は $\rho_*(C)$ と $\rho_*(\Delta)$ によって張られる。但し $\rho_*(\Delta)$ は次のような w.g をもつ。



H は上と同じ w.g とし、$q' = q+1$、又は $q' = q+\alpha_1+1$。

§2. Change of embedding $\mathbb{A}^2_k \hookrightarrow \mathbb{P}^2_k$

以後定理の条件を仮定する。即ち f を k 係数の二変数の多項式，$\forall\alpha \in k$ に対し C_α を $f=\alpha$ によって定義される $\mathbb{A}^2_k$ 上の curve とすると次の二条件が成り立っていると仮定する。

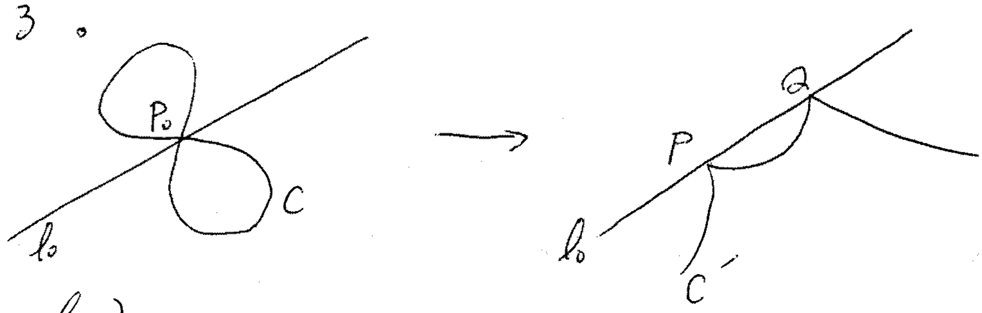
1) $\mathbb{A}^2$ 上の pencil $\{C_\alpha\}_{\alpha\in k}$ の general member は G_m に同型。

2) $\{C_\alpha\}_{\alpha\in k}$ のすべての member は連結。

$\mathbb{A}^2$ の $\mathbb{P}^2$ への embedding $\iota : \mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ を一つ fix し，$\mathbb{A}^2$ を $\mathbb{P}^2$ の subset と identify して考える。$l_0 = \mathbb{P}^2 - \mathbb{A}^2$ とおく。 C_0 を $\{C_\alpha\}_{\alpha \in k}$ の general member とし，C_0 の $\mathbb{P}^2$ における closure を C とする。

"Lemma 5"

いま もし $C \cap l_0 = \{$一点 $P_0\}$（集合として）とすると ある $\mathbb{P}^2$ の birational transformation ρ が存在して ρ の $\mathbb{A}^2$ への restriction は $\mathbb{A}^2$ の automorphism を induce し，$C' = \rho'(C)$ を C の proper transform とすると $C' \cap l_0 = \{$二点$\}$ となる。

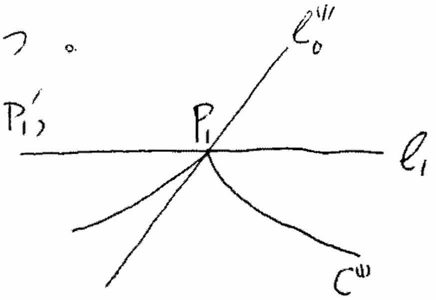


Proof)

$d = (C, l_0)$, $\mu = \mathrm{mult}_{P_0} C$, $\Lambda = \langle C, dl_0 \rangle$ を C と dl_0 によって張られる $\mathbb{P}^2$ 上の linear pencil, $V_0 = \mathbb{P}^2$, $\sigma_1 ; V_1 \longrightarrow V$ を P_0 の blowing up, $l_0^{(1)} = \sigma_1'(l_0)$ $l_1 = \sigma_1^{-1}(P_0)$, $C^{(1)} = \sigma'(C)$, $\Lambda^{(1)}$ を Λ の σ_1 による

proper transform とおく。

まず $d > \mu$ が成り立つ。

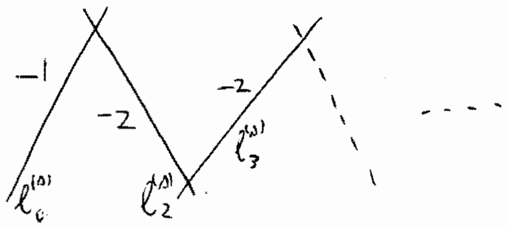


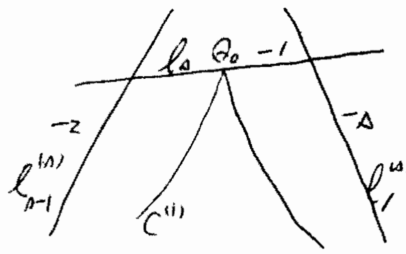
(I). $C^{(1)} \cap l_1 = \{P_1, P_1'\}$, $P_1 \neq P_1'$,
$P_1 = l_0^{(1)} \cap l_1$ とするか、
又は $\beta \in Bir(\mathbb{P}^2)$ が存在して、$\beta|_{\mathbb{A}^2} \in Aut(\mathbb{A}^2)$, かつ $C' = \beta(C)$ とおくと $(C', l_0) = d' < d$ が成り立つ。

(I)の略証)

$C^{(1)} \cap l_1 = \{P_1\}$ と仮定すると、まず $d > \mu$ より、$P_1 = l_0^{(1)} \cap l_1$。ここで、$\sigma ; V_s \to V_1$ を点 $P_1, P_2, \cdots P_{s-1}$ を center とする blowing up の composition と定義する。但し、P_i は P_{i-1} の infinitely near pt で、l_1 の上の点 $(2 \leqq i \leqq s)$, s は $C^{(s)} = \sigma'(C) \not\ni P_s$ となる最小の自然数とする。

$\sigma^{-1}(l_0^{(1)} \cup l_1)$ は、次のような configulation をもつ。



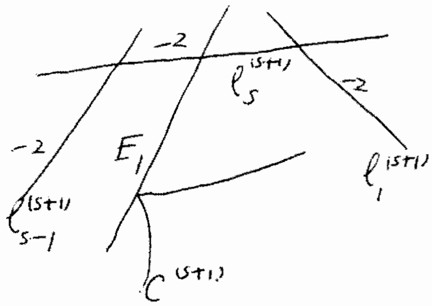


δの求め方と Lemma 1 を使って，次のことがわかる。

- $C^{(s)} \cap \ell_i^{(s)} = \phi \quad (0 \leq i \leq \delta - 1)$
- $\mathrm{mult}_{P_i} C^{(i)} = \mu_i$ とおくと，$\mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_{s-1}$，$\mu = (s-1)\mu_1$。
- $C^{(s)} \cap \ell_s = \{$一点 $Q_0\}$（集合として。）

次に，$\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{\delta-1}$ なる blowing up の列を次のように定義する。

まず，τ_1 を Q_0 の blowing up とし，$C^{(s+1)} = \tau_1'(C^{(s)})$，$E_1 = \tau_1^{-1}(Q_0)$ 等とおくと，次の事が，成り立つ。



- $C^{(s+1)} \cap \ell_s^{(s+1)} = \phi$，$C^{(s+1)} \cap E_1 = \{$一点 $Q_1\}$
- $(C^{(s+1)}, E_1) = \mathrm{mult}_{Q_0} C^{(s)} = (\ell_s \cdot C^{(s)}) = \mu_1$

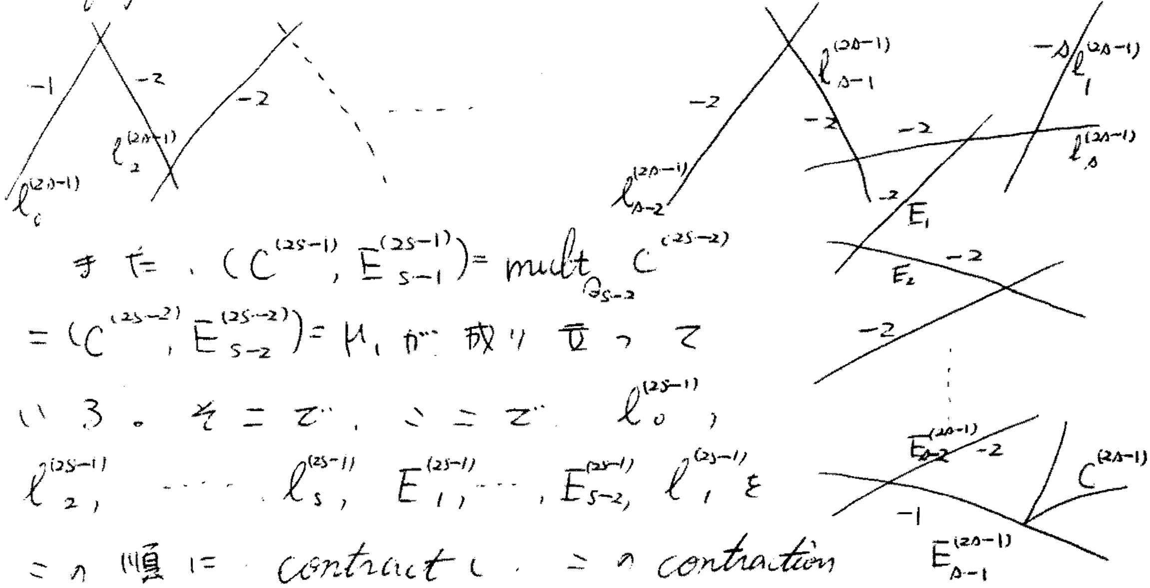
以下，τ_i $(1 \leq i \leq s-2)$ までが定義されているとすると，やはり次の事が成り立つ。

- $C^{(s+i)} \cap E_{i-1}^{(s+i)} = \phi$，$C^{(s+i)} \cap E_i = \{$一点 $Q_i\}$
- $(C^{(s+i)}, E_i) = \mathrm{mult}_{Q_{i-1}} C^{(s+i-1)} = (C^{(s+i-1)}, E_{i-1}) = \mu_1$

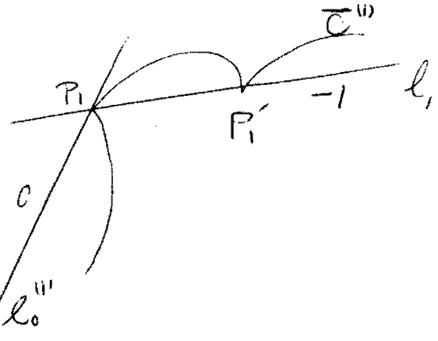
そこで，τ_{i+1} を Q_i の blowing up とする。

$\tau = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots\cdots \circ \tau_{s-1}$ とおくと，$(\sigma_0 \tau)^{-1}(\ell_0 \cup C)$ の

configuration は次のようにする。

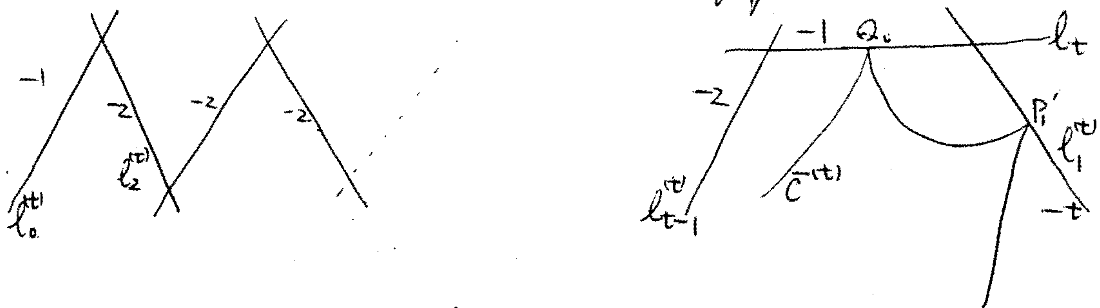


また，$(C^{(2s-1)}, E_{s-1}^{(2s-1)}) = \mathrm{mult}_{Q_{s-2}} C^{(2s-2)} = (C^{(2s-2)}, E_{s-2}^{(2s-2)}) = \mu_1$ が成り立っている。そこで，ここで $l_0^{(2s-1)}$, $l_2^{(2s-1)}$, ……, $l_s^{(2s-1)}$, E_1, …, E_{s-2}, $l_1^{(2s-1)}$ をこの順に contract し，この contraction を $\alpha : V^{(2s-1)} \longrightarrow W$; $\beta = \alpha\cdot\tau^{-1}\sigma^{-1}$ とおく。β の A^2 への restriction は，A^2 の automorphism を induce する。また $W - \alpha(E_{s-1}^{(2s-1)}) = A^2$, $(\alpha(E_{s-1}^{(2s-1)}))^2 = 1$ だから $W = \mathbb{P}^2$ になる。即ち $\beta \in Bir(\mathbb{P}^2)$。$C' = \beta'(C)$ とおくと，$(C, l_0) = \mu_1 = \frac{\mu}{s-1} < d$ となり，(I) が証明された。そこで $(C, l_0) = d$ に関する induction によると結局ある $\mathbb{P}^2$ の birational transformation ρ_1 が存在し，$\rho_1|_{A^2} \in Aut(A^2)$ となり，$\rho_1'(C) = \overline{C}$ とおいて $\overline{C}$ に対して上と同様に C'' を考えると C'' は l_1 と相異なる2点 P_1, P_1' で交わることがわかった。($P_1 = l_0'' \cap l_1$ とおく。)



$P_1, \cdots, P_{t-1}$ を P_1 の infinitely near pt で l_1 の上の点、但し P_i は P_{i-1} の infinitely near pt of order one $(2 \leq i \leq t-1)$ とする。σ_i を P_{i-1} の blowing up とし、σ を $\sigma_2, \sigma_3, \cdots, \sigma_t$ の合成 $\sigma = \sigma_2 \circ \sigma_3 \circ \cdots \circ \sigma_t$ とおく。また t は $C^{(t)} = \sigma^{-1}(\overline{C}^{(1)}) \not\ni P_t = l_1^{(t)} \cap l_t$ とする最小の整数とする。

$\sigma^{-1}(l_0^{(1)} \cup l_1 \cup \overline{C}^{(1)})$ は次の configuration をもつ。



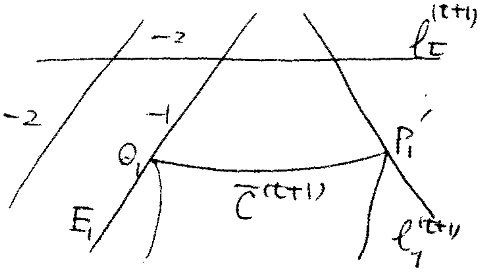
t の選び方と、Lemma 1 及び $\overline{C}^{(t)}$ が $\sigma^{-1}(l_0^{(1)} \cup l_1)$ の上に two place を持つことから次の事が成り立つ。

(1) $\overline{C}^{(t)} \cap l_t = \{$一点$\}$。これを Q_0 とおく。

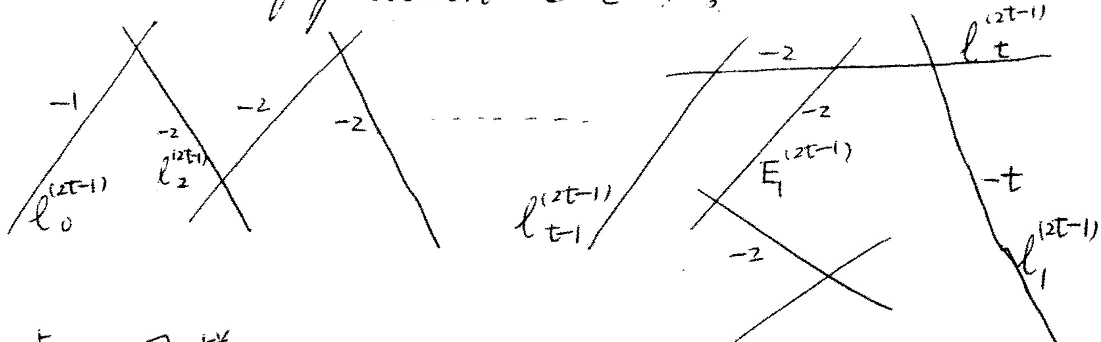
(2) $Q_0 \notin l_{t-1}^{(t)}, l_1^{(t)}$

ここで再び blowing up の sequence $\tau_1, \tau_2, \cdots\cdots, \tau_{\alpha-1}$ を次のように定義する。まず、

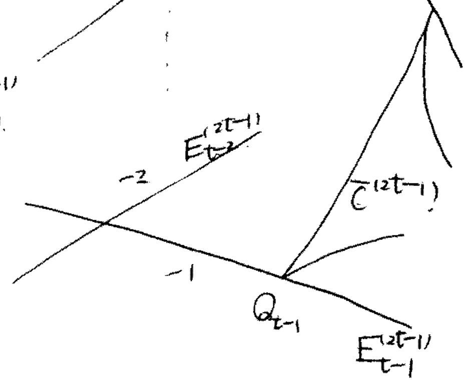
$\tau_1 : V_{t+1} \to V_t$ を Q_0 の blowing up とすると Lemma 1 を使って $Q_1 = E_1 \cap \bar{C}^{(t+1)} \neq l_t^{(t+1)} \cap E_1$ がわかる。
$\tau_2 : V_{t+2} \to V_{t+1}$ を Q_1 の blowing up と定義する。



以下同様にして $\tau_i : V_{t+i} \to V_{t+i-1}$ ($1 \le i \le t-2$) まで定義されたとするとやはり Lemma 1 を使って $Q_i = E_i \cap \bar{C}^{(t+i)} \neq E_{i-1}^{(t+i)} \cap E_i$ がわかる。そこで $\tau_{i+1} : V_{t+i+1} \to V_{t+i}$ を Q_i の blowing up と定義する。$\tau = \tau_1 \circ \cdots\cdots \circ \tau_{t-1}$ とおくと $(\sigma_1 \circ \sigma \circ \tau)^{-1}(l_0 \cup C)$ は次の configulation をもつ。



上と同様にして、
$Q_{t-1} = \bar{C}^{(2t-1)} \cap E_{t-1}^{(2t-1)} \neq E_{t-2}^{(2t-1)} \cap E_{t-1}^{(2t-1)}$
がわかる。



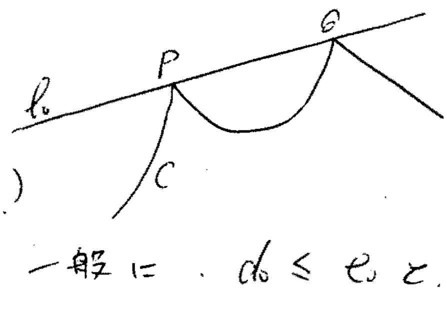
ここで $l_0^{(2t-1)}, l_2^{(2t-1)}, \ldots, l_t^{(2t-1)}$,
$E_1^{(2t-1)}, E_2^{(2t-1)}, \ldots, E_{t-2}^{(2t-1)}, l_1^{(2t-1)}$ を

この順に contract し、この contraction を
$\gamma : V_{2t-1} \longrightarrow Z$ とする。$Z - \gamma(E^{(2t-1)}_{t-1}) = \mathbb{A}^2$ 故、
$Z \simeq \mathbb{P}^2$ になる。従って $\rho_1 = \gamma\cdot\sigma^{-1}\cdot\sigma_1^{-1}$ とおくと
$\rho_1 \in Bir(\mathbb{P}^2)$ で、$\rho_1|_{\mathbb{A}^2}$ は $\mathbb{A}^2$ の automorphism になり
$\rho_1'(\bar{C}) = C'$ とすると $C' \cap l_0 = \{$ two distinct pt $\}$
となる。よって $\rho = \rho_1 \circ \rho_2$ とおけばよい。

Q.E.D

§3 定理の証明

Lemma 5 によって、C と無限遠直線 l_0 が相異なる2点で交わるような embedding $\mathbb{A}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ が存在することが証明された。以後、そのような embedding を一つ固定して考える。但し、ここで C は $\{C_\alpha\}_{\alpha\in k}$ の general member C_0 の $\mathbb{P}^2$ における closure である。



$C \cap l_0 = \{P, Q\}$

$d_0 = i(C, l_0; P)$, $e_0 = i(C, l_0, Q)$

$\Lambda = \langle C, (d_0+e_0)l_0 \rangle$ とおく。一般に、$d_0 \leq e_0$ と仮定しておいてよい。

"Lemma 6"

$d_0=\mathrm{mult}_P C$, $e_0=\mathrm{mult}_Q C$ が成り立つ。

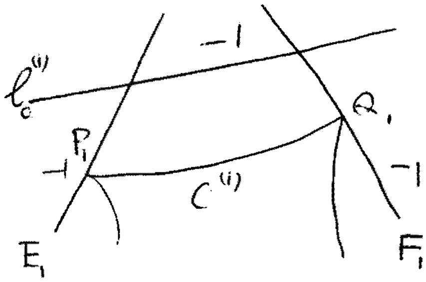
Proof)

$\mathrm{mult}_P C=\mu$, $\mathrm{mult}_Q C=\nu$ とおく。P, Q を blowing up し、C, l_0 の proper transform を、$C^{(1)}, l_0^{(1)}$, exceptional curve を E_1, F_1 とする。すると、

$$C^{(1)}\sim(d_0+e_0)\,l_0^{(1)}+(d_0+e_0-\mu)E_1+(d_0+e_0-\nu)F_1$$

従って、E_1, F_1 は linear pencil Λ の proper transform の $l_0^{(1)}$ を含む member の component になる。Lemma 1 から、$d_0=\mu$, $e_0=\nu$ でなければならない。

Q.E.D



そこで、$P_1=C^{(1)}\cap E_1$, $Q_1=C^{(1)}\cap F_1$, $\mu_1=\mathrm{mult}_{P_1}C^{(1)}$, $\nu_1=\mathrm{mult}_{Q_1}C^{(1)}$ とおく。同じようにして、次の事がわかる。

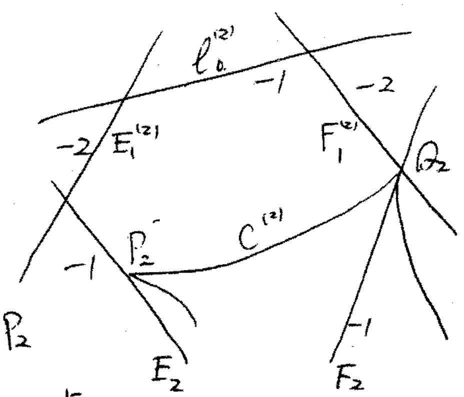
"Lemma 7

$d_0=1$, or $e_0>d_0=\mu_1\geq\nu_1$ が成り立つ。"

以下、$d_0=1$ の case は同様にしてより簡

単に証明できるので、$e_0 > d_0 = \mu_1 \geqq \nu_1$, $d_0 \neq 1$ の case を考える。

まず、P_1, Q_1 を blowing up すると右のような configuration を得る。



そこで、$P_2, P_3, \cdots, P_{t+1}$ を P_2 の infinitely near pt で $C^{(2)}$ の上の点、
但し P_i は P_{i-1} の order 1 の infinitely near pt とし、t は次のように選ぶ。即ち $\mathrm{mult}_{P_i} C^{(i)} = \mu_i$ としたとき、$d_0 = \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_t > \mu_{t+1}$ をみたす。

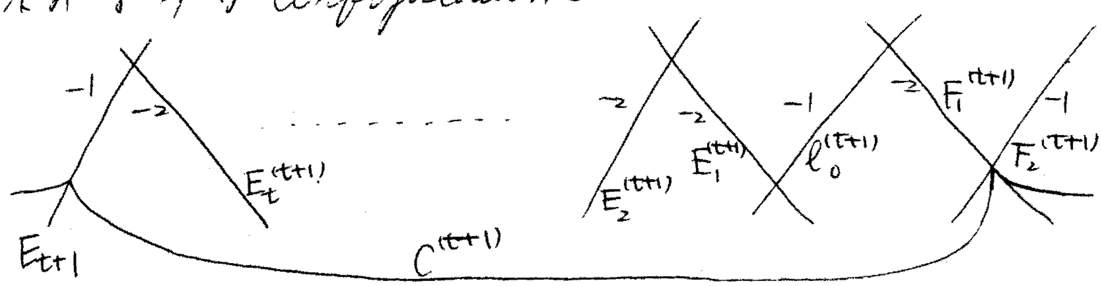
すると次の Lemma が成り立つ。

"Lemma 8"

$e_0 - t d_0 > 0$

Proof.)

$P_2, P_3, \cdots, P_t$ と順に blowing up していくと次のような configiulation をもつことがわかる。



しかも、

$$C^{(t+1)} \sim (d_0+e_0)\,l_0^{(t+1)} + d_0 F_1^{(t+1)} + (d_0-\nu_1)F_2^{(t+1)} + \sum_{i=1}^{t+1}(e_0-i+1)E_i^{(t+1)}$$

C は Λ の general member としているから、$e_0 - td_0 \geqq 0$ であるが、いま $e_0 - td_0 = 0$ と仮定する。Λ′ を linear pencil Λ の proper transform とすると、E_{t+1} は Λ′ の quasi-section になるが、Λ′ の general member が E_{t+1} の上に one place pt をもつことから、$(C^{(t+1)}, E_{t+1}) = 1 = \mu_t = d_0 = 1$ となって $d_0 > 1$ と仮定していることに矛盾する。よって $e_0 - td_0 > 0$ である。

Q. E. D

Lemma 8 の configuration で、$F_2^{(t+1)}, l_0^{(t+1)}, E_1^{(t+1)}, E_2^{(t+1)}, \cdots, E_t^{(t+1)}$ をこの順に contract する。得られた surface を U、Λ の proper transform を $\bar{\Lambda}$ とおくて次の事が成り立っている。

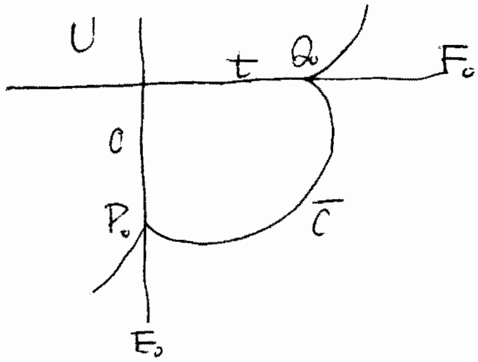
(1) $\bar{\Lambda} = \langle \bar{C},\ d_0F_0 + (e_0 - td_0)E_0 \rangle$

$e_0 - td_0 > 0$

(2) $(E_0)^2 = 0$, $(F_0^2) = t$, $(E_0, F_0) = 1$

(3) $(\bar{C}, E_0) = d_0 P_0$, $(\bar{C}, F_0) = e_0 Q_0$

$P_0 \notin F_0$, $Q_0 \notin E_0$



(4) $d_1 = \mathrm{mult}_{P_0}\,\overline{C} = \mu_{t+1} < d_0$

$e_1 = \mathrm{mult}_{Q_0}\,\overline{C} = \nu_1 < e_0$

$e_0 > d_0 \geqq e_1$.

そこで (d_0, d_1), (e_0, e_1) のそれぞれの pair について、ユークリッド互除法を行なう。

$d_0 = p_1 d_1 + d_2 \qquad 0 < d_2 < d_1$

$d_1 = p_2 d_2 + d_3 \qquad 0 < d_3 < d_2$

$d_{m-2} = p_{m-1} d_{m-1} + d_m \qquad 0 < d_m < d_{m-1}$

$d_{m-1} = p_m d_m \qquad 1 < p_m$.

$e_0 = q_1 e_1 + e_2 \qquad 0 < e_2 < e_1$

$e_1 = q_2 e_2 + e_3 \qquad 0 < e_3 < e_2$

$e_{n-2} = q_{n-1} e_{n-1} + e_n \qquad 0 < e_n < e_{n-1}$

$e_{n-1} = q_n e_n \qquad 1 < q_n$.

次に、a_0, $a(i, j)$, b_0, $b(i, j)$ を inductive に次のように定義する。

$$a_0 = e_0 - t d_0$$

$$a(1, j) = j(a_0 - d_1) \qquad (1 \leq j \leq p_1)$$

$$a(2, j) = a_0 + j(a(1, p_1) - d_2) \qquad (1 \leq j \leq p_2)$$

$$\cdots\cdots$$

$$a(i, j) = a(i-2, p_{i-2}) + j(a(i-1, p_{i-1}) - d_i) \quad (1 \leq j \leq p_i)$$

$$b_0 = d_0$$

$$b(1, j) = j(b_0 - e_1) \qquad (1 \leq j \leq q_1)$$

$$b(2, j) = b_0 + j(b(1, q_1) - e_2) \qquad (1 \leq j \leq q_2)$$

$$\cdots\cdots$$

$$b(i, j) = b(i-2, q_{i-2}) + j(b(i-1, q_{i-1}) - e_i) \qquad (1 \leq j \leq q_i)$$

そこで、まず P_0 の infinitely near pt で $\bar{C}$ の上の点を $p_1 + p_2 + \cdots + p_m$ 回 blowing up する。次いで Q_0 の infinitely near pt で $\bar{C}$ の上にある点を $q_1 + q_2 + \cdots + q_n$ 回 blowing up する。得られた blowing up の composition を $\rho : W \longrightarrow U$ とすると、$\rho^{-1}(E_0 \cup F_0)$ の W g は次のようになる。但し E_0, F_0 の proper transform を同じ記号 E_0, F_0 で表わしてある。

$$\mathcal{E} \;—\!—\!— \overset{\alpha}{\underset{E_0}{\circ}} —\!—\!—\!—\!— \overset{\beta}{\underset{F_0}{\circ}} —\!—\!— \; \mathcal{F}$$

$\mathcal{E}$の w.g は 次ページのようにする。$\mathcal{F}$ の w.g も同様である。また α, β は

$$\alpha = -(p_1+1) \qquad \text{if } m>1$$
$$\alpha = -p_1 \qquad \text{if } m=1$$
$$\beta = t-(q_1+1) \qquad \text{if } n>1$$
$$\beta = t-q_1 \qquad \text{if } n=1$$

$\bar{\Lambda}$ の ρ による *proper transform* を $\tilde{\Lambda}$ とする。
単純な計算によって W の上で

$$C \sim a_0 E_0 + b_0 F_0 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_i} a(i,j)\, E(i,j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q_i} b(i,j)\, F(i,j)$$

が成り立つことがわかる。

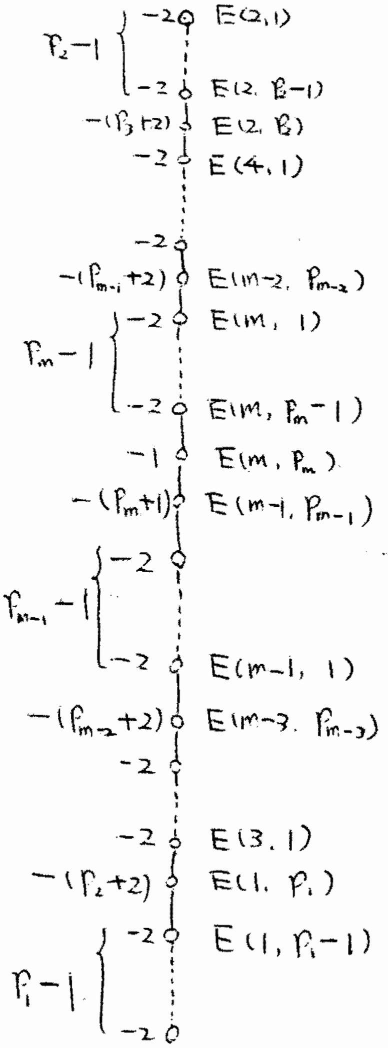
$\tilde{C}$ は $\tilde{\Lambda}$ の *general member* 故, $a(i,j)\geq 0$, $b(i,j)\geq 0$. 上の式の右辺を $\tilde{\Delta}$ とおく。また、一般に上のような *blowing up* の *composition* を *Eucledean transformation* と呼ぶが これについては *Miyanishi* [3] を参照。

"*Lemma 9*"

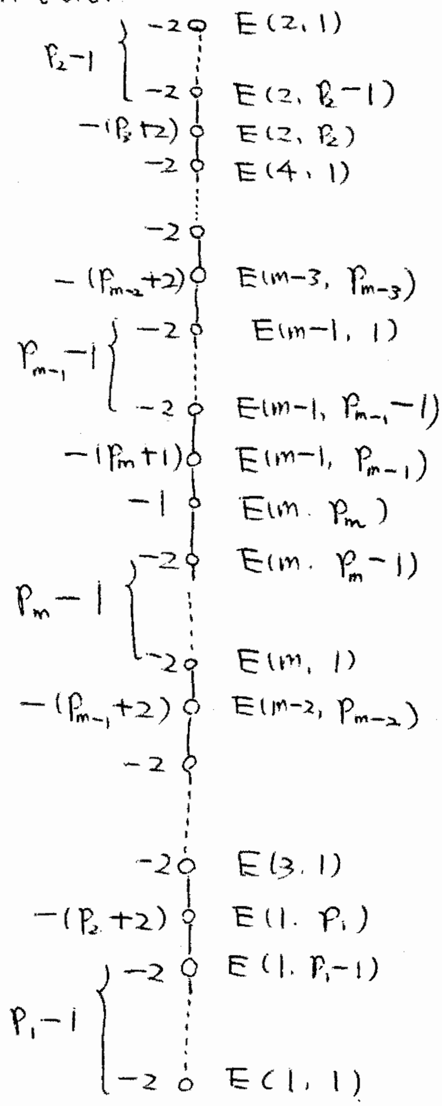
$$a(m,p_m)d_m = d_0 \cdot a(1,1), \qquad b(n,q_n)e_n = e_0 \cdot b(1,1)$$
$$a(m,p_m) \neq 1, \qquad b(n,q_n) \neq 1$$

The weighted graph of $\mathcal{E}$

(1) m: even



(2) n odd



$E(2,1)$ が E_0 と結ばれる。

C' は $E(m, P_m)$ と交わるが、他の component とは交わらない。 $(C', E(m, P_m)) = d_m$

"Lemma 10"

$a(1,1)=0$, $b(1,1)=0$

従って，$a(m,p_m)=0$, $b(n,q_n)=0$ となり，
$E(m,p_m)$, $F(n,q_n)$ は $\widetilde{\Lambda}$ の quasi-section になる。
Proof)

$a(1,1)>0$, $b(1,1)>0$ と仮定する。まず次のことがわかる。

(1) $a(i,j)>0$, $\forall(i,j)$ $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq p_i$

$b(i,j)>0$, $\forall(i,j)$ $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq q_i$

(2) $a(m,p_m)\neq 1$, $b(n,q_n)\neq 1$

(3) B を $\widetilde{\Lambda}$ の base pt の集合とすると

$B=\{\widetilde{P},\widetilde{Q}\}$ 但し $\widetilde{P}=\widetilde{C}\cap E(m,p_m)$, $\widetilde{Q}=\widetilde{C}\cap F(n,q_n)$

で $\widetilde{P}$, $\widetilde{Q}$ は それぞれ $E(m,p_m)$, $F(n,q_n)$ 以外の $\widetilde{\Delta}$ の component に属さない。

Lemma 1 より F_0 は exceptional component でなければならない。F_0, $F(2,1)$, ‥, $F(2,q_2-1)$ と contract し contraction を τ_1 とする。$(\tau_1(E_0))^2=t-(p_1+1)$ $\tau_1(F(2,q_2))^2=-(q_2+1)$.. よって $\tau_1(E_0)$ が exceptional component でなければならない。$\tau_1(E_0)$, $\tau_1(E(2,1))$ $\tau_1(E(2,2))$, ‥ , $\tau_1(E(2,p_2-1))$ と contract する。

contractionを　τ_2とすると　$(\tau_2\cdot\tau_1(F(2,q_2)))^2 = p_2-(q_2+1)$
$(\tau_2\cdot\tau_1(E(2,p_2))^2 = -(p_3+1)$　。よって　$\tau_2\cdot\tau_1(F(2,q_2))$が
exceptional compでなければならない。以下
contractionを続けて　$E(m,p_m)$と$F(n,q_n)$の
間にあるcurveで　$E(m,p_m)$ $F(n,q_n)$以外の
exceptional compをcontractできる限りcontract
する。このcontractionのcompositionを$\tau: W\to Z$
とする。$\tau(\triangle)$の w.g は次のようになる。

$$G \;\underset{E(m,\,p_m)}{\overset{p}{\text{———}\circ\text{———}}}\; M \;\underset{F(n,\,q_n)}{\overset{q}{\text{———}\circ\text{———}}}\; H$$

ここで　$p\leq 0$　または　$q\leq 0$。何故なら、もし$p>0$，$q>0$とすると　$M=\phi$でなければならない。ところが　contractionでたとえばm,n evenの時　$E(m,p_{m-1})$，$F(n,q_{n-1})$の　いずれか一方が最後にcontractされている。$F(n,q_{n-1})$が最後にcontractされていれば　$q=0$　となって矛盾を生じる。よって$p\leq 0$または　$q\leq 0$。
以上で，Lemma 3 の条件をみたすsituationを得た。よって　Lemma 3　により　$G=\phi$または$H=\phi$でなければいけない。これは明らかに

矛盾。よって $a(1,1)=0$ または $b(1,1)=0$；以下 たとえば $a(1,1)=0$, $b(1,1)>0$ とすると、Lemma 3, 4 を使って、矛盾を得る。従って結局 $a(1,1)=0$, $b(1,1)=0$ となることがわかった。

Q.E.D

以上で、linear pencil $\tilde{\Lambda}$ は、base pt をもっていないこと、および $\tilde{\Lambda}$ の general member が $E(m, p_m)$, $F(n, q_n)$ の上に one place pt をもつ事から $E(m, p_m)$, $F(n, q_n)$ が $\tilde{\Lambda}$ の section になっていることがわかった。

φ を linear pencil $\tilde{\Lambda}$ に associate する morphism $\varphi: W \longrightarrow \mathbb{P}^1$ とする。今までの construction から

$$W - (E_0 \cup F_0 \cup (\cup E(i,j)) \cup (\cup F(i,j))) = X \simeq \mathbb{A}^2_k$$

は明らかである。

"Lemma 11".

上に定義した fibration φ は、$\varphi^{-1}(Q) \cap X$ が reducible になる fibre を唯一つもつ。しかも $\varphi^{-1}(Q) \cap X$ は 2本の irreducible component からなる。

Proof)

$Q_1, \cdots, Q_s \in \mathbb{P}^1_k$ を $\varphi^{-1}(Q_i) \cap X$ が reducible になる点全体とし，$\varphi^{-1}(Q_i) \cap X$ の irreducible component の数を n_i とする。$Q_{s+1}, \cdots, Q_t \in \mathbb{P}^1$ を，$\varphi^{-1}(Q_i)$ が reducible になるが，$\varphi^{-1}(Q_i) \cap U$ が irred になる点全体，$Q_\infty = \varphi(\widetilde{\Delta})$ とおく。$\varphi^{-1}(Q_1), \cdots, \varphi^{-1}(Q_\infty)$ が φ の reducible fibre 全体である。$X - (\bigcup_{i=1}^{t} \varphi^{-1}(Q_i) \cap X) = \operatorname{Spec} B$ とおくと，B^*/k^* は rank が $n_1 + \cdots\cdots + n_s + (t-s)$ の free $\mathbb{Z}$ module になる。他方

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(\mathbb{P}^1_k - (Q_1, \cdots, Q_t, Q_\infty))} ; \varphi^{-1}(\mathbb{P}^1_k - (Q_1, \cdots, Q_t, Q_\infty)) \to \mathbb{P}^1_k - \{Q_1, \cdots, Q_\infty\}$$

は $\mathbb{P}^1$ bundle で，

$$\begin{aligned} \operatorname{Spec} B &= \varphi^{-1}(\mathbb{P}^1_k - \{Q_1, \cdots, Q_t, Q_\infty\}) - (E(m, p_m) \cup F(n, q_n)) \\ &= \mathbb{A}^1_* \times \{\mathbb{P}^1_k - \{Q_1, \cdots, Q_t, Q_\infty\}\} \end{aligned}$$

よって B^*/k^* は rank が $1+t$ の free $\mathbb{Z}$ module になる。よって $n_1 + n_2 + \cdots + n_s + (t-s) = 1+t$ だが $n_i \geqq 2$ だから $s = 1$，$n_1 = 2$

Q.E.D

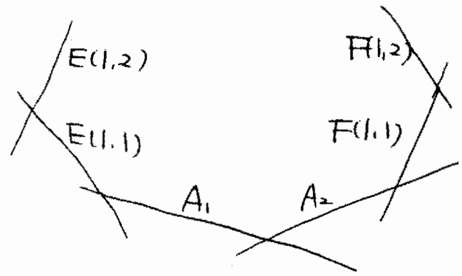
そこで，$E(1,1)$, $E(1,2)$ $\cdots\cdots$ を含む $\widehat{\Lambda}$ の member を Γ_1，$F(1,1)$, $F(1,2)$, $\cdots\cdots$ を含む $\widehat{\Lambda}$ の member を Γ_2 とする。

$\Gamma_1 \neq \Gamma_2$ とすると Γ_1, Γ_2 のいずれか一方は (Supp Γ_i) $\cap X$ が irreducible になる。いま (Supp Γ_1) $\cap X$ が irred であるとし X と交わる Γ_1 の component を A とする。A は section $F(n, q_n)$ と交わるから Γ_1 の component としての multiplicity $=1$。すると Supp Γ_1 は A 以外に exceptional curve of the first を含まねばならないが、これは矛盾である。よって $\Gamma_1 = \Gamma_2$。

$\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$ とおくと (Supp Γ) $\cap X$ は reducible である。何故なら もし (Supp Γ) $\cap X$ が irred. とすると Lemma 11 によって $\exists Q \in \mathbb{P}$ が存在し $\varphi^{-1}(Q) = L_1 \cup L_2$ となる。L_1, L_2 は無限遠に one place pt をもつ irred non-singular rat curve で 一点で transversal に交わっているから L_1, L_2 をそれぞれ X 軸 Y 軸に選ぶことができる。(Miyanishi [2] を参照。) しかも, L_1, L_2 は section と交わるから multiplicity は 1 である。よって $\varphi^{-1}(Q) \cap X$ は $XY=0$ によって 定義される。Γ の component で X と交わるものを A とすると $A \cap X$ は $XY - c = 0$ $c \in k$

によって 定義されることになり pencil Λ の member Γ の component としての A の multiplicity が 1 になってしまい これは前と同様矛盾である。よって $(\mathrm{Supp}\,\Gamma)\cap X$ は reducible。

$(\mathrm{Supp}\,\Gamma)\cap X = A_1 \cup A_2$ とおくと, A_1, A_2 は最初の仮定(2)を使うと結局 $E(1.1)$, $F(1.1)$ と交わり, しかも $(A_1 \cdot A_2)=1$ であることがわかる。



よって A_1, A_2 を y 軸, x 軸に選ぶことができて A_1, A_2 の multiplicity をそれぞれ d, e とすると $\Gamma\cap X$ は $x^d y^e = 0$ によって定義される。$\Gamma \cap X$ は最初に考えた $X = A_k^2$ 上の pencil $\{C_\alpha\}_{\alpha\in k}$ の一 member であるから その member $\{f=0\}$ は $f = c\,(x^d y^e - 1) = 0$ によって定義されることがわかった。但 $c \in k$ とする。$(d, e) = 1$ は明らか。

定理の証明了

Remark. 実は 上の d, e は最初の intersection multiplicity d_0, e_0 と一致することがわかる。

References

[1] S. S. Abhyankar and T. T. Moh ; Embeddings of the line in the plane, Journal für die reine und angewandte Mathematik. 276 (1975)

[2] M. Miyanishi ; An algebraic characterization of the affine plane, Journal of Mathematics of Kyoto University Vol. 15. No. 1, 1975.

[3] M. Miyanishi ; Analytic irreducibility of certain curves on a non-singular affine rational surfaces, Proc. Internat. Sympos. on Algebraic Geometry, Kyoto, 1977

[4] H. Saitō ; Fonctions entières qui se réduisent à certains polynomes (I), Osaka Journal of Math. 1972.